

2do Parcial

Algoritmos y Estructuras de Datos 3 – DC, FCEyN, UBA

24/11/2021

Para realizar consultas, deben conectarse por Discord al canal de le docente a le cual quieran consultar. Tener en cuenta que una docente no puede conectarse con dos estudiantes en simultáneo. Las aclaraciones de enunciado que podamos llegar a hacer van a ser comunicadas vía Discord al canal de consultas de la práctica.

El examen transcurre de 17:00 a 21:00 hs. A las 21:00 se desconectarán los docentes de sus canales de Discord y tendrán hasta las 23:00 para realizar la entrega vía campus. (Luego de este horario, las entregas serán rechazadas.) El archivo subido al campus puede sobreescribirse una cantidad ilimitada de veces hasta la hora de entrega. Independientemente de si sobreescriben o no, deberán confirmar su entrega definitiva (que ya no podrá sobreescribirse). Sólo en caso de que el Campus estuviera saturado y no funcionara, sería adecuado realizar la entrega por mail a algo3-doc@dc.uba.ar con copia a fsoulin@dc.uba.ar indicando claramente la entrega en el asunto.

El examen puede realizarse **a mano** o en **computadora**. En el primer caso, deben **escanearlo o fotografiarlo** y deben **unir y comprimir** las páginas resultantes para generar un único archivo en **formato PDF** con un **peso razonable**. El resultado debe ser un documento **legible** (buena iluminación, buena resolución, buena orientación, no fotos cortadas, etc.) y que tenga un **orden de lectura claro, ¡verificarlo!**. En el segundo caso, el formato debe ser **PDF** o **texto plano (txt)**. Por cuestiones de compatibilidad, **no** se aceptan entregas en otros formatos (zip, rar, jpg, gif, png, tiff, etc). **Tampoco** se aceptan entregas de links a repositorios personales.

El examen es personal y pueden usar las teóricas, las clases prácticas y las guías de ejercicios, citando claramente. Las respuestas deben estar debidamente justificadas incluso en aquellos ejercicios en los que este hecho no es recordado.

El examen se **aprueba** con al menos uno de los ejercicios 1–2 aprobados y al menos uno de los ejercicios 3–4 aprobados.

- 1) Sea G un digrafo con pesos positivos que tiene dos vértices especiales s y t . Decimos que una arista $e \in E(G)$ es *crítica* para s y t cuando $d_G(s, t) < d_{G-e}(s, t)$.¹ Diseñar un algoritmo de complejidad temporal $O(\min\{n^2, m \log n\})$ que, dado G , determine las aristas de G que son críticas para s y t . **Ayuda:** pensar qué propiedad satisfacen las aristas críticas en el subgrafo P de G que está formado por las aristas de caminos mínimos de G (el “grafo de caminos mínimos”). Notar que conservar las orientaciones de G en P es innecesario (¿por qué?).
- 2) Dado un digrafo G con un vértice s , queremos encontrar un recorrido de G que empiece y termine en s , pase la mayor cantidad de veces por s , y no tenga aristas repetidas.
 - a) Proponer un modelo de flujo que permita resolver el problema. **Ayuda:** pensar en el problema de buscar caminos disjuntos en aristas entre s y una copia de s .

¹Recordar que $d_H(x, y)$ denota el mínimo de entre los pesos de los caminos de H que van de x a y .

- b) Dar una interpretación a cada unidad de flujo y cada restricción de capacidad.
- c) Indicar cómo se interpreta el flujo máximo del modelo y cómo se construye el recorrido correspondiente.
- d) Determinar la complejidad de resolver el modelo resultante con el algoritmo de Edmonds y Karp. La cota debe estar expresada en función de $n + m$.

3) Considerar los siguientes problemas:

- 3-COLOREO: dado un grafo conexo G , ¿se puede particionar $V(G)$ en tres conjuntos independientes?
- 3-COLOREO($\leq k$): dado un grafo conexo G , ¿se puede particionar $V(G)$ en tres conjuntos independientes donde algún conjunto tenga a lo sumo k vértices?
- 3-COLOREO($\geq k$): dado un grafo conexo G , ¿se puede particionar $V(G)$ en tres conjuntos independientes donde todos los conjuntos tengan al menos k vértices?

Sabiendo que 3-COLOREO es NP-completo:

- a) Proponer certificados y verificadores que demuestren que los otros dos problemas pertenecen a **NP**.
- b) Describir brevemente un algoritmo polinomial para 3-COLOREO($\leq k$) que funcione para todo $k \geq 0$.
- c) Demostrar que 3-COLOREO($\geq k$) es **NP-completo** para todo $k \geq 0$. **Ayuda:** agregue vértices que no afecten al problema de 3-coloreo pero agranden las particiones obligatoriamente.

4) Para este ejercicio, suponer que los resultados del ejercicio anterior son válidos.

- a) Demostrar la existencia una reducción polinomial que transforma instancias de 3-COLOREO($\geq k$) en instancias de 3-COLOREO.
- b) Suponiendo que se descubre un algoritmo polinomial A para 3-COLOREO, describir un algoritmo polinomial para 3-COLOREO($\geq k$).
- c) Demostrar que si Π es un problema que no pertenece a **P**, entonces o bien 3-COLOREO no puede reducirse a 3-COLOREO($\leq k$) o bien Π no puede reducirse a 3-COLOREO.